

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Sesiunea Iulie 2022
Subiect la Matematică

Subiectul 1 Pentru $t \in \mathbb{R}$ considerăm matricele

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & -\sin t \\ -\sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t & \sin t \\ \sin t & 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

- i) Calculați $A(t)B(t)$, $B(t)A(t)$ și determinați mulțimea $M = \{t \in \mathbb{R} : A(t) \text{ este inversabilă}\}$;
- ii) Calculați $\det(A(t)^3 + B(t)^3)$;
- iii) Arătați că există și determinați $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(t)^{2022} = r^{2021}A(t)$ și $B(t)^{2022} = r^{2021}B(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Subiectul 2 Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă

$$x \star y = xy - 5x - 5y + 30, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- i) Calculați $2022 \star 5$;
- ii) Arătați că mulțimea $M = [5, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de legea " $\star$ ";
- iii) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{2022 \text{ ori}} = 6$.

Subiectul 3 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e \cdot x$.

- i) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$;
- ii) Determinați imaginea funcției f ;
- iii) Arătați că $e^{x^2-1} + e^{x-1} \geq x^2 + x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul 4 Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 1} dx$.

- i) Calculați I_0 și I_1 ;
- ii) Să se arate că $4I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
- iii) Studiați convergența șirului $(nI_n)_{n \geq 0}$ și calculați limita acestuia.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu note cuprinse între 1 și 10.

Timp de lucru: 3 ore.